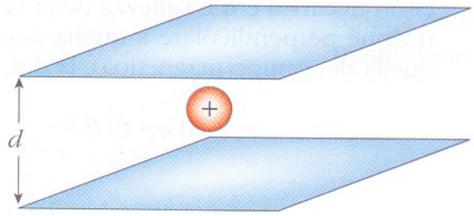
Problemi di Fisica

Moto di cariche elettriche in campi elettrici e magnetici

PROBLEMA

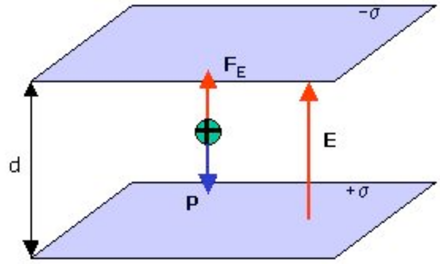


Una gocciolina d'olio di densità ρ = 0,822 g/cm^3, con carica q = 6,40·10^{-19} C e raggio r = 3,00·10^{-5} cm, viene posta fra due placche distanti fra loro d = 5,00 mm.

- ✓ Calcolare la differenza di potenziale da applicare fra le placche affinchè la goccia rimanga in equilibrio.

SOLUZIONE

La goccia rimane in equilibrio se la forza peso **P**, diretta verso il basso, viene equilibrata dalla forza elettrica **F**$_E$, diretta verso l'alto. Affinché ciò avvenga, le placche devono essere caricate come in figura e quindi il campo elettrico **E** diretto dalla placca positiva a quella negativa.



Dalla condizione di equilibrio calcoliamo il modulo del campo elettrico:

$$F_E = P \Rightarrow qE = mg \Rightarrow E = \frac{mg}{q} = \frac{93 \cdot 10^{-18} \cdot 9{,}81}{6{,}40 \cdot 10^{-19}} = 1430\,V/m = 1{,}43\,kV/m$$

dove: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(3{,}00 \cdot 10^{-5})^3 = 113 \cdot 10^{-15}\ cm^3 = 113 \cdot 10^{-24}\ m^3$

$$m = \rho \cdot V = 0{,}822 \cdot 113 \cdot 10^{-15} = 93 \cdot 10^{-15}\ g = 93 \cdot 10^{-18}\ kg$$

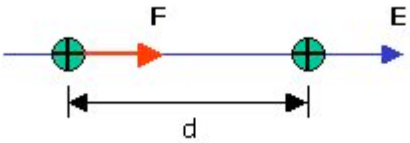
Noto il campo elettrico, la differenza di potenziale da applicare fra le placche affinchè la goccia rimanga in equilibrio è dato da:

$$V = Ed = 1{,}43 \cdot 10^3 \cdot 5{,}00 \cdot 10^{-3} = 7{,}15\,V$$

PROBLEMA

Uno ione positivo di massa m = 9,0·10^{-26} kg e carica q = 3,2·10^{-19} C, partendo da fermo, si muove lungo una linea di forza di un campo elettrico uniforme per un tratto di lunghezza d = 1,6 cm. Sapendo che l'intensità del campo elettrico è E = 1,0·10^3 V/m, calcolare il tempo impiegato dallo ione per percorrere la distanza d.

SOLUZIONE



La forza alla quale è soggetto lo ione positivo ha modulo:

$$F = qE = 3{,}2 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}0 \cdot 10^3 = 3{,}2 \cdot 10^{-16}\ N$$

Per il 2° principio della dinamica, l'accelerazione subita dallo ione è:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3{,}2 \cdot 10^{-16}}{9{,}0 \cdot 10^{-26}} = 0{,}36 \cdot 10^{10}\ m/s^2$$

Dalla legge del moto rettilineo uniforme ricaviamo il tempo impiegato dallo ione per percorrere la distanza d:

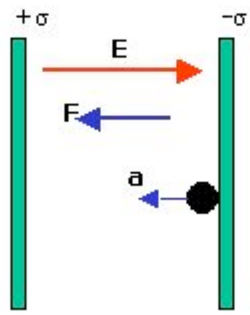
$$d = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-2}}{0{,}36 \cdot 10^{10}}} = 3{,}0 \cdot 10^{-6}\ s$$

PROBLEMA

Tra due lastre caricate di segno opposto esiste un campo elettrico uniforme. Un elettrone viene lasciato libero sulla superficie della lastra carica negativamente e colpisce la superficie della lastra opposta, a distanza di 20 cm, in un tempo t = $1{,}5\cdot10^{-8}$ s.

- Calcolare il campo elettrico tra le due armature.

SOLUZIONE



Per definizione il campo elettrico è dato da:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

ed è diretto dall'armatura positiva a quella negativa.

Mentre la forza **F =** m**a** è diretta nel verso opposto in quanto la carica su cui agisce è un elettrone (e = $1{,}602\cdot10^{-19}$C; m = $9{,}108\cdot10^{-31}$kg), ossia una carica di segno negativo.

Pertanto, essendo un moto uniformemente accelerato (con a < 0), dalla legge del moto ricaviamo l'accelerazione:

$$s = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2\cdot 0{,}2}{(1{,}5\cdot10^{-8})^2} = 0{,}18\cdot10^{16}\,m/s^2$$

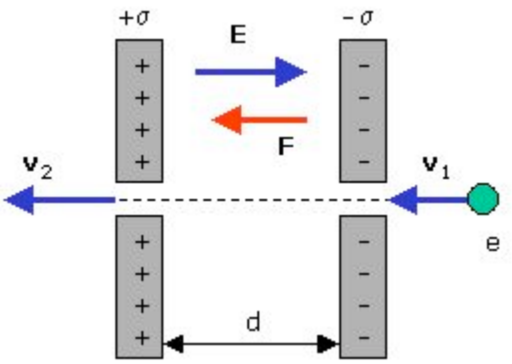
per cui:

$$F = 9{,}108\cdot10^{-31}\cdot0{,}18\cdot10^{16} = 1{,}64\cdot10^{-15}N$$

Infine, il campo elettrico tra le due armature sarà:

$$E = \frac{1{,}64\cdot10^{-15}}{1{,}602\cdot10^{-19}} = 1{,}02\cdot10^{4}N/C$$

PROBLEMA



Un elettrone (m = $9{,}1\cdot10^{-31}$ kg; e = $1{,}6\cdot10^{-19}$ C), passando attraverso due fenditure praticate sulle armature di un condensatore piano e distanti d = 1,0 cm, transita nella regione in cui ha sede il campo elettrico con velocità iniziale v_1 = $1{,}0\cdot10^5$ m/s e fuoriesce dal campo con velocità finale v_2 = $9{,}0\cdot10^5$ m/s.

- Calcolare l'intensità del campo elettrico.

SOLUZIONE

Nella regione attraversata dall'elettrone possiamo assumere costante il campo elettrico, nell'ipotesi che le dimensioni delle due fenditure siano trascurabili rispetto alle dimensioni delle armature del condensatore

Grazie al teorema dell' energia cinetica calcoliamo il lavoro compiuto sull'elettrone dalle forze del campo elettrico:

$$L = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m\cdot\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot\left[(9{,}0\cdot 10^5)^2 - (1{,}0\cdot 10^5)^2\right] = 364\cdot 10^{-21}\,J$$

Dalla definizione di lavoro ricaviamo la forza che agisce sulla particella:

$$L = F\cdot d \Rightarrow F = \frac{L}{d} = \frac{364\cdot 10^{-21}}{1{,}0\cdot 10^{-2}} = 364\cdot 10^{-19}\,N$$

Infine, determiniamo il campo elettrico attraverso la sua definizione:

$$E = \frac{F}{e} = \frac{364\cdot 10^{-19}}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 228\,N/C$$

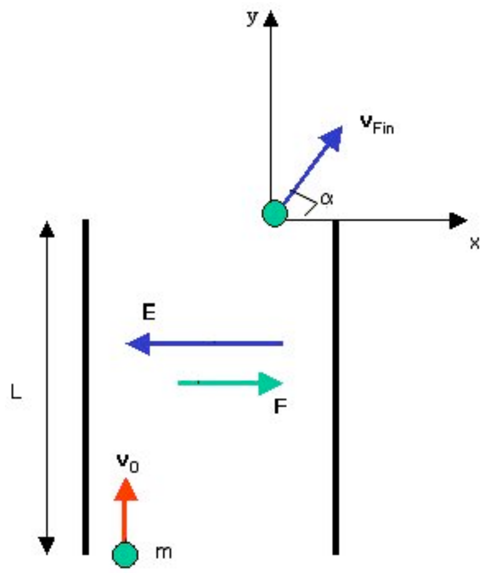
PROBLEMA

Un condensatore piano ha un campo elettrico E = 10^4 V/m e una lunghezza L = 5 cm. Un elettrone entra tra le armature con una velocità v_0 = 10^7 m/s ortogonale ad **E**.

- Calcolare l'angolo di deflessione all'uscita del condensatore ed il modulo della velocità (trascurare gli effetti al bordo).

SOLUZIONE

Dalla definizione di campo elettrico ricaviamo che la forza elettrostatica che agisce sull'elettrone è data da:



$$\vec{F} = q\cdot\vec{E}$$

per cui **F** ha la stessa direzione di **E** ma verso opposto in quanto la carica q è negativa. Pertanto **F** agisce perpendicolarmente alla velocità iniziale dell'elettrone $\mathbf{v}_0$ e lo devia verso destra.
Il moto dell'elettrone in queste condizioni è paragonabile a quello di un proiettile, cioè costituito da due moti indipendenti:

moto rettilineo uniforme lungo l'asse y

$$y = v_{0y}\cdot t \qquad (1)$$

moto uniformemente accelerato lungo l'asse x

$$v_x = a\cdot t \qquad (2)$$

Ricavando il tempo t dalla (1): $t = \frac{L}{v_{0y}}$ e sostituendolo nella (2) otteniamo la componente x della velocità:

$$v_x = a\cdot\frac{L}{v_{0y}} = \frac{F}{m}\cdot\frac{L}{v_{0y}} = \frac{e\cdot E}{m}\cdot\frac{L}{v_{0y}} = \frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 10^4}{9{,}11\cdot 10^{-31}}\cdot\frac{5\cdot 10^{-2}}{10^7} = 8{,}8\cdot 10^6\ m/s$$

dove $a = \frac{F}{m}$ (2° principio della dinamica).

Pertanto il modulo della velocità e l'angolo di deflessione sono dati da:

$$v_{Fin} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(8{,}8 \cdot 10^6)^2 + (10^7)^2} = 1{,}33 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

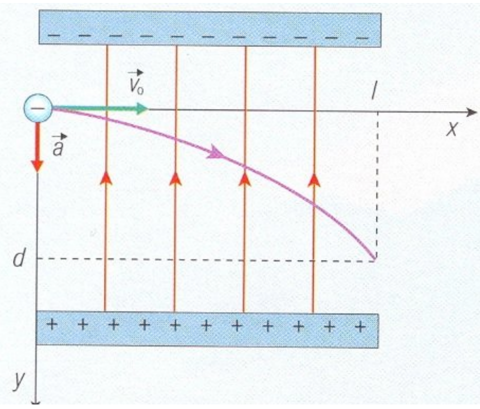
$$tg\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{10^7}{8{,}8 \cdot 10^6} = 1{,}14 \Rightarrow \alpha = 48{,}7°$$

PROBLEMA

Un elettrone entra fra le placche di un oscillografo a raggi catodici con energia cinetica E_C = 2,50·10^3 eV, diretto perpendicolarmente al campo elettrico. L' intensità del campo E = 1,40·10^4 N/C e la lunghezza delle placche è L = 1,60 cm.

- Determinare la traiettoria dell'elettrone e la sua deflessione all'uscita dalle placche.

SOLUZIONE



La conoscenza dell'energia cinetica E_C ci permette di esprimere in funzione di parametri noti il modulo V_0 della velocità iniziale dell'elettrone. Indicando con m = 9,109·10^{-31} kg la massa dell'elettrone abbiamo infatti:

$$E_C = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \text{da cui: } v_0 = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} \qquad (1)$$

Per lo studio del moto fissiamo il sistema cartesiano rappresentato in figura, con l'asse x diretto come la velocità iniziale v_0 e l'asse y diretto in verso opposto al campo elettrico **E** esistente fra le placche, cioè orientato come l'accelerazione **a:**

$$\vec{a} = -\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$

dove: e = 1,602·10^{-19} C la carica dell'elettrone.

Mentre continua a muoversi di moto rettilineo uniforme lungo l'asse x con velocità v_0, l'elettrone si muove di moto uniformemente accelerato lungo l'asse y, con componente y della velocità iniziale nulla e componente y dell'accelerazione pari a:

$$a_y = \frac{eE}{m}$$

Il moto risultante è un moto parabolico come quello di un proiettile lanciato orizzontalmente nel campo gravitazionale terrestre.

Le equazioni orarie dei due moti sono:

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}t^2 \end{cases}$$

Eliminando il tempo t da queste due equazioni, otteniamo l'equazione della traiettoria:

$$y = \frac{eE}{2mv_0^2} x^2$$

che consiste in una parabola con l'asse coincidente con l'asse y. La deflessione d dell'elettrone all'uscita dalle placche è il valore di y che corrisponde a x = L. Tenendo anche conto della (1) otteniamo:

$$d = \frac{eEL^2}{4E_C} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot (1{,}60 \cdot 10^{-2})^2}{4 \cdot 2{,}50 \cdot 10^3 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}} = 3{,}58 \cdot 10^{-4}\ \text{m} \qquad \text{dove: } 1\ \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

PROBLEMA

Una particella di massa m = 1,0 g e carica negativa $q = -2{,}0 \cdot 10^{-6}$ C viene immessa nel campo elettrico di una carica fissa positiva $Q = 1{,}0 \cdot 10^{-5}$ C, a una distanza r= 5,0 m da quest'ultima e ortogonalmente alla linea di forza passante per il punto di immissione. Calcolare:

1. la velocità della particella affinché percorra un'orbita circolare di raggio r;
2. l'energia totale della particella su tale orbita;
3. la velocità con la quale dovrebbe essere immessa per poter sfuggire dal campo elettrico su una traiettoria parabolica.

SOLUZIONE

1. Essendo le cariche q e Q opposte, la forza tra di esse è attrattiva per cui il moto della particella q nel campo elettrico della particella fissa Q è identico al moto di un satellite nel campo gravitazionale terrestre, per cui si possono avere vari tipi di orbite. Si ottiene un'orbita circolare di raggio r se la particella è lanciata a distanza r dalla carica fissa con una velocità iniziale **v** diretta perpendicolarmente alla forza elettrica e tale che la forza elettrica sia uguale a quella centripeta. In formula:

$$F_E = F_C \Rightarrow K\frac{|qQ|}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

da cui segue che:

$$v = \sqrt{K \cdot \frac{|qQ|}{mr}} = \sqrt{9 \cdot 10^9 \cdot \frac{2{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-5}}{1{,}0 \cdot 10^{-3} \cdot 5{,}0}} = 6{,}0\ \text{m/s}$$

2. L'energia cinetica della particella sull'orbita circolare di raggio r è espressa da:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}K\frac{|qQ|}{r} = -\frac{1}{2}K\frac{qQ}{r} = -\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-2{,}0 \cdot 10^{-6}) \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-5}}{5{,}0} = 0{,}018\ \text{J}$$

mentre l'energia potenziale è data da:

$$U = K \cdot \frac{qQ}{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(-2{,}0 \cdot 10^{-6}) \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-5}}{5{,}0} = -0{,}036\ \text{J}$$

L'energia totale posseduta dalla particella sull'orbita di raggio r è pertanto:

$$E_T = E_C + U = 0{,}018 - 0{,}036 = -0{,}018\ \text{J}$$

3. Se la particella possiede una velocità v quando la sua distanza dalla carica fissa è *r,* la sua energia totale è:

$$E_T = K\frac{qQ}{r} + \frac{1}{2}mv^2$$

La particella sfugge dal campo su un'orbita parabolica la quando la sua velocità di immissione assume un valore v_f (velocità di fuga) tale da rendere nulla l'energia totale, cioè se è soddisfatta la condizione:

$$0 = K\frac{qQ}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

In questo caso poiché $\lim_{r\to\infty} U = 0$ la particella si allontana fino a distanza infinita con energia cinetica tendente a zero.

Risolvendo la (2) otteniamo:

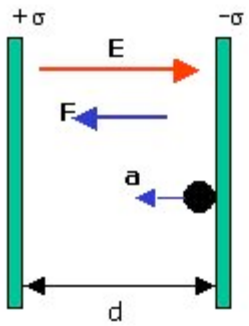
$$v_f = \sqrt{-2K\frac{qQ}{mr}} = \sqrt{-2\cdot 9\cdot 10^9 \cdot \frac{(-2,0\cdot 10^{-6}\cdot 1,0\cdot 10^{-5})}{1,0\cdot 10^{-3}\cdot 5,0}} = 8,47 \ m/s$$

PROBLEMA

Un elettrone, emesso da un elettrodo (catodo) con energia cinetica nulla, viene accelerato verso un secondo elettrodo (anodo) mantenuto a una d.d.p. V = 1000 V rispetto al primo. Sapendo che la distanza fra i due elettrodi è d =0,40 m e che il campo elettrico è uniforme, determinare:

1. l'accelerazione dell'elettrone;
2. la sua velocità quando raggiunge l'anodo;
3. la distanza dall'anodo in cui l'energia cinetica e l'energia potenziale dell'elettrone sono uguali.

SOLUZIONE



1. La forza che accelera l'elettrone è quella esercitata su di esso dal campo elettrico nel quale si muove:

$$F = eE = e\frac{V}{d}$$

L'accelerazione dell'elettrone, per il 2° principio della dinamica, è dunque:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eV}{md} = \frac{1,60\cdot 10^{-19}\cdot 1000}{9,11\cdot 10^{-31}\cdot 0,40} = 4,39\cdot 10^{14} \ m/s^2$$

2. Per il calcolo della velocità v dell'elettrone giunto sull'anodo, osservando che la sua energia potenziale iniziale U = eV viene convertita interamente in energia cinetica, per il principio di conservazione dell' energia si ha:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \quad \text{da cui segue:} \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1,60\cdot 10^{-19}\cdot 1000}{9,11\cdot 10^{-31}}} = 1,87\cdot 10^7 \, m/s$$

3. Osserviamo che il potenziale elettrico V(x) a distanza x dall'anodo, ponendo V(x) = 0 per x=0, è dato da:

$$V(x) = E\ x = \frac{V}{d}x$$

Pertanto l'energia potenziale dell'elettrone a distanza x dall'anodo è:

$$U(x) = eV(x) = \frac{eVx}{d} \quad (1)$$

Per il principio di conservazione dell'energia la somma dell'energia potenziale U(x) e dell'energia cinetica $E_C(x)$, possedute dall'elettrone in moto verso l'anodo a distanza x da questo, è pari alla sua energia potenziale iniziale, cioè:

$$U(x) + E_C(x) = eV$$

Per trovare la distanza dall'anodo del punto in cui l'energia cinetica e quella potenziale sono uguali, dobbiamo imporre:

$$U(x) + E_C(x) = 2U(x) = eV \quad \text{da cui, per la (1), segue:} \quad 2\frac{eVx}{d} = eV$$

Otteniamo così:

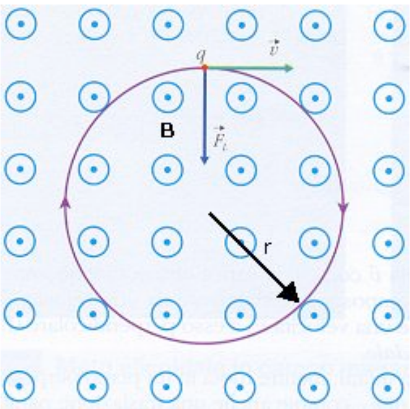
$$x = \frac{d}{2} = \frac{0{,}40}{2} = 0{,}20\,m = 20\,cm$$

PROBLEMA

Un protone (m = $1{,}67\cdot10^{-27}$ kg; p = $1{,}6\cdot10^{-19}$ C) entra in un campo magnetico **B** (verso uscente dal foglio) con velocità v = $2{,}0\cdot10^{6}$ m/s.

1. Dimostrare che la traiettoria descritta dal protone entro il campo magnetico **B** è circolare;
2. Calcolare l'intensità del campo di induzione magnetica necessario perché il protone possa muoversi su un'orbita circolare di raggio 1,0 m.

SOLUZIONE



1. Il protone viene iniettato entro il campo con velocità v perpendicolare all'induzione magnetica **B** (verso uscente dal foglio). La forza di Lorentz **F**, perpendicolare alla velocità e al campo, è orientata come in figura (regola mano destra) e ha modulo:

$$F = qvB \quad (1)$$

L'accelerazione acquistata dalla particella carica giace nel piano del disegno ed è, in ogni istante, perpendicolare alla velocità. Si tratta dunque di un'accelerazione centripeta, legata alla forza dalla seconda legge della dinamica:

$$F = ma_C = m\frac{v^2}{r} \quad (2)$$

Dal confronto della (1) e della (2) possiamo perciò scrivere:

$$qvB = m\frac{v^2}{r}$$

da cui:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (3)$$

Poiché le grandezze al secondo membro di questa equazione sono tutte costanti, il raggio *r* della traiettoria non varia.
Possiamo pertanto concludere che una carica elettrica, immessa in un campo magnetico uniforme perpendicolarmente alle linee di forza, si muove di moto circolare uniforme nel piano perpendicolare al campo e il valore costante della velocità lungo la traiettoria coincide con la velocità posseduta dalla particella nell'istante in cui entra nel campo.
Il campo magnetico ha come solo effetto quello di incurvare la traiettoria. Per questo motivo la forza magnetica si chiama anche *forza deflettente.*

2. Dall'equazione (3) ricaviamo l'intensità B del campo di induzione magnetica necessario perché il protone possa muoversi su un'orbita circolare di raggio 1,0 m:

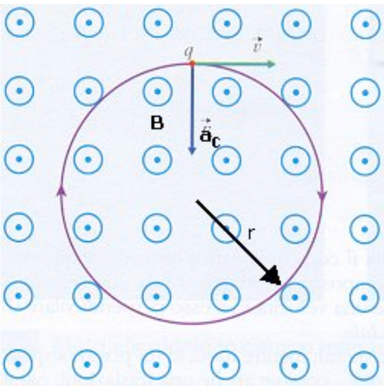
$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{6}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}0} = 2{,}1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{T}$$

PROBLEMA

Un corpuscolo di massa $m = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ kg e carica $q = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ C viene immesso in un campo di induzione magnetica uniforme B = 0,20 T con velocità v = 2,0 m/s in direzione normale alle linee di forza del campo.

- Calcolare l'accelerazione centripeta del corpuscolo.

SOLUZIONE



Il corpuscolo carico immesso nel campo magnetico uniforme **B** perpendicolarmente alle linee di forza, si muove di moto circolare uniforme nel piano perpendicolare al campo e il valore costante della velocità lungo la traiettoria coincide con la velocità posseduta dalla particella nell'istante in cui entra nel campo.

Il raggio dell'orbita circolare è dato da:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot 2{,}0}{1{,}0 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}20} = 10\,\mathrm{m}$$

Pertanto l'accelerazione centripeta vale:

$$a_C = \frac{v^2}{r} = \frac{2{,}0^2}{10} = 0{,}40\,\mathrm{m/s^2}$$

PROBLEMA

Un elettrone ($m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C), prima di penetrare in un campo di induzione magnetica uniforme $B = 0{,}50 \cdot 10^{-4}$ T, è accelerato con una differenza di potenziale di ΔV = 91 V.

Calcolare:

1. l'energia cinetica dell'elettrone nell'istante in cui penetra nel campo magnetico;

2. il periodo del moto circolare, nell'ipotesi che la sua velocità sia diretta ortogonalmente al campo magnetico.

SOLUZIONE

1. Sull'elettrone viene fatto un lavoro pari a:

$$L = e\Delta V = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 91 = 91\,eV$$

in seguito all'accelerazione acquisita grazie alla differenza di potenziale alla quale viene sottoposto.
Grazie al teorema dell'energia cinetica, questo lavoro è proprio uguale all'energia cinetica posseduta dall'elettrone nell'istante in cui penetra nel campo magnetico **B**:

$$L = E_C = 91\,eV$$

2. Il periodo del moto circolare uniforme, per definizione, è dato da:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (1)$$

Sostituendo nella (1) l'espressione del raggio dell'orbita circolare:

$$r = \frac{mv}{eB}$$

si ottiene:

$$T = \frac{2\pi m}{eB} = \frac{2\pi \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}50 \cdot 10^{-4}} = 71{,}4 \cdot 10^{-8}\ s = 0{,}71\,\mu s$$

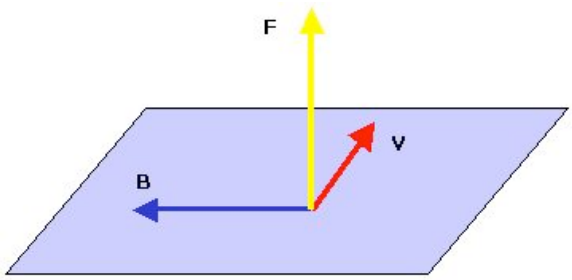
PROBLEMA

Un protone ($p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg) entra in un campo magnetico uniforme B=0,30 T, con una velocità $V = 1{,}0 \cdot 10^{4}$ m/s perpendicolare al campo magnetico. Calcolare: L'accelerazione subita dal protone

SOLUZIONE

Gli esperimenti dimostrano che una carica elettrica immersa in un campo magnetico subisce una forza magnetica data da:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{V} \otimes \vec{B}$$



Poiché **F** è una grandezza vettoriale, avrà:

- intensità pari a:
-

$$F = q \cdot V \cdot B \cdot \operatorname{sen}\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{4} \cdot 0{,}30 \cdot 1 = 4{,}8 \cdot 10^{-16} N$$

dove: $\alpha = 90° \Rightarrow \operatorname{sen}90° = 1$

- un verso e una direzione dati dalla regola della mano destra:

ponendo il pollice della mano destra nel verso della velocità e le altre dita nel verso del campo magnetico, la forza magnetica avrà direzione perpendicolare al palmo della mano e verso uscente.

Utilizzando la 2ª legge della dinamica calcoliamo l'accelerazione subita dal protone:

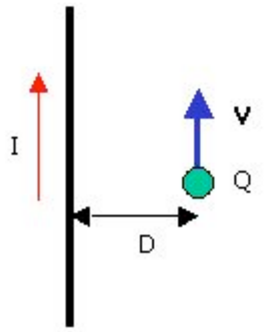
$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{4{,}8 \cdot 10^{-16}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 2{,}9 \cdot 10^{11}\ m/s^2$$

Ripetere il problema per una carica negativa.

PROBLEMA

Una particella carica positivamente si muove parallelamente a un filo percorso da una corrente I = 0,45 A a distanza di 65 cm dal filo stesso con una velocità V = 10 m/s.

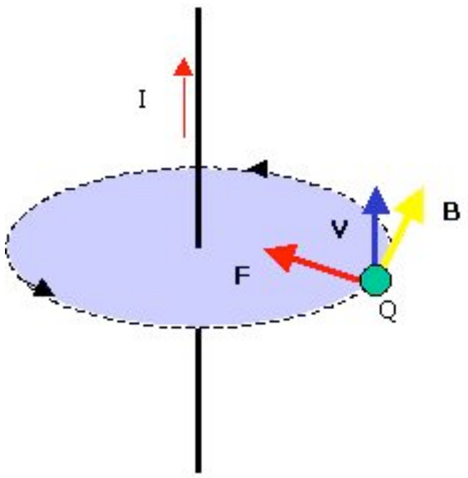
1. Calcolare il valore del campo magnetico che agisce sulla carica;
2. Descrivere la direzione ed il verso del campo magnetico e, in base a ciò, stabilire quanto vale l'angolo tra il vettore **B** ed il vettore **V**;
3. Calcolare il valore della carica nel caso in cui su di essa agisce una forza $F = 7{,}4 \cdot 10^{-12}$ N
4. Disegnare il vettore forza che agisce sulla particella.



SOLUZIONE

1. Il valore del campo magnetico che agisce sulla carica non è altro quello prodotto dal filo percorso dalla corrente I, per cui:

$$B = k \cdot \frac{I}{D} = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{0{,}45}{0{,}65} = 1{,}4 \cdot 10^{-7} T$$



2. Le linee del campo magnetico prodotto dal filo percorso da corrente sono circonferenze concentriche al filo, disegnate in un piano perpendicolare al filo. Per trovare il verso di tali linee, si punta il pollice della mano destra nel senso della corrente e le altre dita si chiudono nel verso del campo. Pertanto, il campo magnetico **B**, nel nostro caso sarà un vettore perpendicolare al foglio ed entrante, per cui formerà un angolo di 90° con il vettore velocità **V**

3. Poiché sulla carica agisce una forza magnetica di intensità:

$$F = Q \cdot V \cdot B \qquad \text{in quanto } sen90° = 1$$

allora il valore della carica lo calcoliamo come formula inversa:

$$Q = \frac{F}{V \cdot B} = \frac{7{,}4 \cdot 10^{-12}}{10 \cdot 1{,}4 \cdot 10^{-7}} = 5{,}3 \cdot 10^{-6} C = 5{,}3 \mu C$$

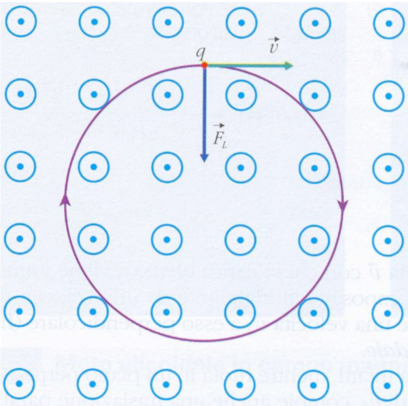
4. Dalla regola della mano destra ricaviamo che: il vettore forza **F** è perpendicolare alla velocità e diretto verso il filo.

PROBLEMA

Una particella di massa $m=1,0\cdot10^{-6}$ kg e carica $q=1,0\cdot10^{-5}$ C è immessa, perpendicolarmente alle linee di forza, in un campo di induzione magnetica uniforme di modulo B=0,63 T. Se v=63m/s è il modulo della velocità della particella, determinare:

1. l'accelerazione centripeta cui essa è soggetta;
2. dopo quanto tempo dall'istante di immissione la particella ha percorso metà della sua traiettoria circolare?

SOLUZIONE



1. La forza di Lorentz, alla quale è soggetta la particella quando viene iniettata entro il campo **B** con velocità **v**, è orientata come in figura (regola mano destra) ed ha modulo:

$$F_M = qvB \quad (1)$$

L'accelerazione acquistata dalla particella carica giace nel piano del disegno ed è, in ogni istante, perpendicolare alla velocità. Si tratta dunque di un'accelerazione centripeta e quindi la particella è soggetta ad una forza centripeta diretta verso il centro di curvatura della traiettoria, il cui modulo è:

$$F_C = ma_C \quad (2)$$

Pertanto, confrontando la (1) e (2) si ottiene un'equazione dalla quale è possibile ricavare l'accelerazione centripeta:

$$qvB = ma_C \Rightarrow a_C = \frac{qvB}{m} = \frac{1,0\cdot10^{-5}\cdot63\cdot0,63}{1,0\cdot10^{-6}} = 4,0\cdot10^2 \ \ m/s$$

2. Il moto circolare si svolge con frequenza:

$$f = \frac{qB}{2\pi m}$$

per cui il periodo è:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi m}{qB}$$

e dunque il tempo per percorrere metà della traiettoria, uguale a mezzo periodo, è:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{\pi m}{qB} = \frac{\pi\cdot1,0\cdot10^{-6}}{1,0\cdot10^{-5}\cdot0,63} = 0,50 \ \ s$$

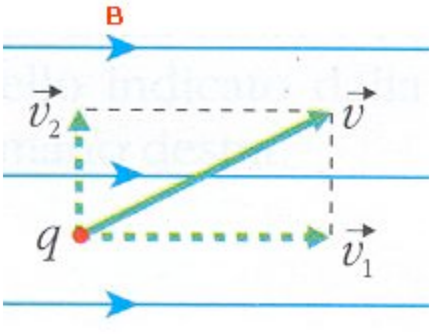
PROBLEMA

Un elettrone con energia cinetica e$\mathbf{E}_0$, dove $\mathbf{E}_0$ e' il campo elettrico, viene a trovarsi in un campo di induzione magnetica **B**. La sua velocità forma un angolo di 60° con la direzione di **B**. Determinare:

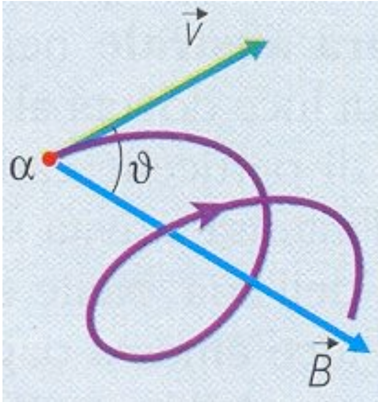
1. Il periodo T di rotazione
2. Il passo p (la distanza percorsa nella direzione del campo dopo ogni giro)
3. Il raggio r dell'elica descritta.

(dati del problema E_0=100 eV, B=10^{-4} T)

SOLUZIONE



Una particella carica che penetra in un campo di induzione magnetica uniforme **B** con una velocità **v** avente, rispettivamente, componenti $\mathbf{v}_1$ nella direzione del campo e $\mathbf{v}_2$ nel piano perpendicolare al campo, descrive una traiettoria elicoidale



Essendo per definizione:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eE_0 \qquad \text{si ricava che:} \qquad v = \sqrt{\frac{2eE_0}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 100}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 5{,}9 \cdot 10^6\ m/s$$

quindi la componente di **v** nella direzione del campo vale:

$$v_1 = v\cos\vartheta = 5{,}9 \cdot 10^6 \cdot \cos 60 = 2{,}95 \cdot 10^6\ m/s$$

mentre in quella perpendicolare vale:

$$v_2 = v\sin\vartheta = 5{,}9 \cdot 10^6 \cdot \sin 60 = 5{,}1 \cdot 10^6\ m/s$$

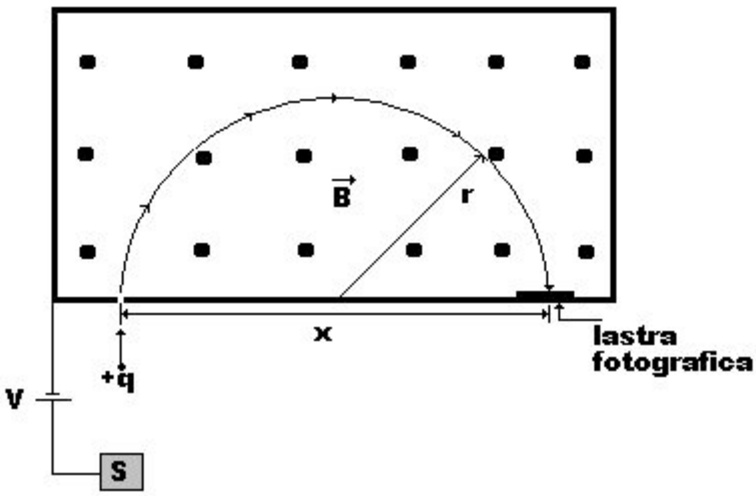
Pertanto, è possibile calcolare:

1. il periodo T di rotazione: $T = \dfrac{2\pi m}{eB} = \dfrac{2\pi \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-4}} = 35{,}7 \cdot 10^{-8}\ s = 357\,ns$

2. Il passo p: $p = v_x T = 2{,}95 \cdot 10^6 \cdot 35{,}7 \cdot 10^{-8} = 1{,}05\,m$

3. Il raggio r dell'elica decritta: $r = \dfrac{v_y}{\omega} = \dfrac{T}{2\pi}v_y = \dfrac{35{,}7 \cdot 10^{-8}}{2\pi} \cdot 5{,}1 \cdot 10^6 = 0{,}29\,m$

PROBLEMA



La figura illustra gli elementi essenziali di uno spettrometro di massa, utile a misurare la massa di uno ione.
La sorgente S produce uno ione di massa m e carica q. Lo ione, inizialmente fermo, viene accelerato dal campo elettrico presente con la differenza di potenziale V. Lo ione lascia S ed entra in una camera dove è presente un campo magnetico **B** uniforme e perpendicolare al cammino dello ione. Il campo magnetico piega la traiettoria dello ione facendole assumere forma semicircolare e mandandolo a colpire una lastra fotografica, che ne rimane impressionata, a distanza x dalla fenditura d'ingresso.

Supponiamo che in un certo esperimento sia:

$B = 80{,}00$ mT; $V = 1000$V; $q = +1{,}602\cdot 10^{-19}$; $x = 1{,}625$ m

- calcolare la massa dei singoli ioni in unità di massa atomica (1 uma = $1{,}660\cdot 10^{-27}$ kg)

SOLUZIONE

Dobbiamo trovare la relazione tra la massa dello ione e la distanza misurata x. A questo scopo poniamo $x = 2r$, dove r è il raggio della traiettoria circolare.
Il raggio r è legato alla massa dalla relazione:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (1)$$

La velocità è legata al potenziale V di accelerazione attraverso la legge di conservazione dell'energia applicata allo ione:

$$E_{Ti} = E_{Tf} \Rightarrow qV = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \quad (2)$$

dove: qV = energia potenziale elettrica iniziale $\frac{1}{2}mv^2$ = energia cinetica finale

Sostituendo la (2) nella (1) si ottiene:

$$r = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2qV}{m}} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

Di conseguenza:

$$x = 2r = \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2mV}{q}}$$

Risolvendo rispetto a m e introducendo i valori numerici, si trova la massa dei singoli ioni:

$$m = \frac{B^2qx^2}{8V} = \frac{(80\cdot 10^{-3})^2\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\cdot (1{,}625)^2}{8\cdot 1000} = 3{,}386\cdot 10^{-25}\text{kg} = 203{,}9 \ \text{uma}$$

PROBLEMA

Un campo magnetico uniforme **B** di intensità 1,2 mT è diretto perpendicolarmente al piano verso l'esterno. Un protone ($m = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg) con energia cinetica di 5,3 MeV entra in tale campo muovendosi orizzontalmente da sud a nord.

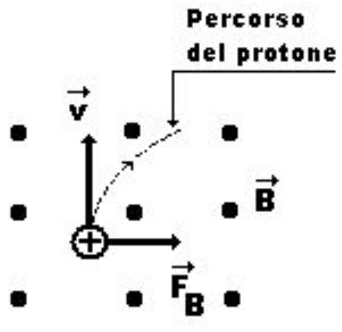
- Calcolare l'accelerazione subita dal protone.

SOLUZIONE

Dal secondo principio della dinamica si ha:

$$a = \frac{F_B}{m}$$

dove F_B è la forza magnetica (forza di Lorentz) a cui è soggetto il protone:



$$\vec{F}_B = q\vec{v}\otimes\vec{B}$$

il cui verso è quello indicato in figura (regola della mano destra) e il modulo:

$$F_B = qvBsen\alpha$$

La forza di deflessione magnetica dipende dalla velocità, che non è nota, che è legata all'energia cinetica del protone:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} = 3{,}2 \cdot 10^7 m/s$$

per cui:

$$F_B = qvBsen90° = 6{,}1 \cdot 10^{-15}\ N$$

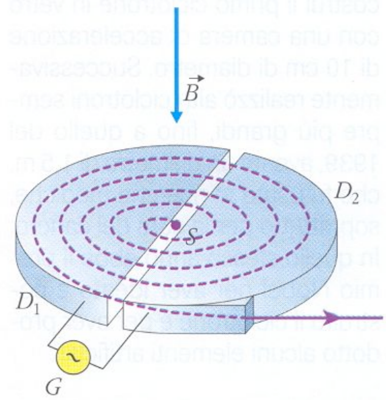
Pertanto in definitiva:

$$a = \frac{6{,}1 \cdot 10^{-15}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 3{,}7 \cdot 10^{12}\ m/s^2$$

Considerazione: se la carica è negativa come sarà diretta la forza magnetica?

PROBLEMA

Da un ciclotrone escono protoni con energia cinetica E_C = 10,0 MeV. Se il campo di induzione magnetica entro l'acceleratore ha modulo B = 1,50 T, calcolare: la frequenza della tensione alternata applicata ai due elettrodi e il loro raggio.



SOLUZIONE

La frequenza della tensione alternata è uguale alla frequenza del moto circolare dei protoni, per cui, ricordando che un protone ha carica q= $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C e massa m = $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg, è uguale a:

$$f = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}50}{2\pi \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 2{,}39 \cdot 10^7\ Hz$$

Il raggio dei due elettrodi del ciclotrone coincide con il raggio r della semicirconferenza percorsa dai protoni con energia cinetica E_C:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

e quindi con velocità:

$$v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} \quad (1)$$

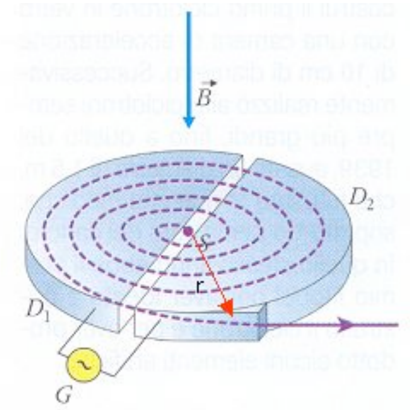
In definitiva, sostituendo nella relazione del raggio della traiettoria la (1) si ottiene:

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{m}{qB}\sqrt{\frac{2E_C}{m}} = \frac{\sqrt{2mE_C}}{qB} = \frac{\sqrt{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 1{,}00 \cdot 10^7 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}50} = 0{,}305\, m$$

dove: 1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J

PROBLEMA

Il raggio di curvatura massimo della traiettoria dei protoni ($m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ kg; $p = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C) accelerati in un ciclotrone è $r = 1$ m. Se il campo di induzione magnetica è $B = 2$ T, quali sono la frequenza del moto dei protoni e la loro energia cinetica massima



SOLUZIONE

Il moto circolare dei protoni lungo l'orbita di raggio r si svolge con frequenza:

$$f = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\cdot 2}{2\pi\cdot 1{,}67\cdot10^{-27}} = 0{,}31\cdot10^{8}\ \text{Hz} = 31\,\text{kHz}$$

ed hanno una energia cinetica massima pari a:

$$E_{C_{max}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}67\cdot10^{-27}\cdot(1{,}92\cdot10^{8})^2 = 3{,}1\cdot10^{-11}\ \text{J} = 1{,}92\cdot10^{8}\ \text{eV}$$

dove:

- la velocità v è stata ricavata dalla relazione del raggio r:

$$r = \frac{mv}{qB} \Rightarrow v = \frac{rqB}{m} = \frac{1\cdot 1{,}6\cdot10^{-19}\cdot 2}{1{,}67\cdot10^{-27}} = 1{,}92\cdot10^{8}\ \text{m/s}$$

- $1\,\text{eV} = 1{,}602\cdot10^{-19}\ \text{J} \Rightarrow 3{,}1\cdot10^{-11}\ \text{J} = \dfrac{3{,}1\cdot10^{-11}}{1{,}602\cdot10^{-19}} = 1{,}92\cdot10^{8}\ \text{eV}$

PROBLEMA

Una particella α (alfa), in prossimità dell'equatore terrestre, si muove verso Est con una velocità $v = 5{,}0\cdot10^{6}$ m/s. Sapendo che in quel punto il campo magnetico terrestre ha modulo $B = 3{,}0\cdot10^{-5}$ T, calcolare modulo, direzione e verso della forza magnetica agente sulla particella.

SOLUZIONE

Tenendo presente che il verso del campo magnetico terrestre è quello indicato da un ago magnetico (bussola) e quindi diretto verso il Nord magnetico, e poiché la particella alfa si muove verso Est, risulta evidente dalla regola della mano destra che la forza magnetica agente sulla particella è diretta verticalmente verso l'alto.

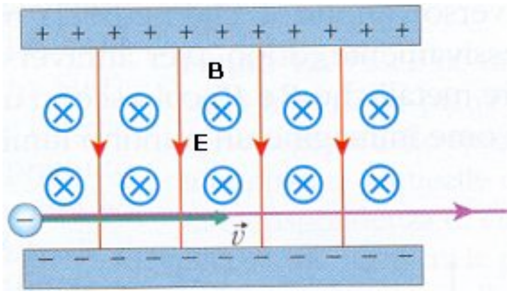
Poiché la particella alfa è costituita da due protoni e due neutroni, esattamente come un nucleo di elio, la sua carica è:

$$q = 2e = 2\cdot 1{,}6\cdot10^{-19} = 3{,}2\cdot10^{-19}\ \text{C}$$

per cui il modulo della forza magnetica agente sulla particella alfa vale:

$$F = qvB = 3{,}2\cdot10^{-19}\cdot 5{,}0\cdot10^{6}\cdot 3{,}0\cdot10^{-5} = 48\cdot10^{-18}\ \text{N}$$

PROBLEMA



Un separatore di velocità ha un campo di induzione magnetica B = 0,01 T ortogonale a un campo elettrico E = $2{,}0\cdot10^4$ V/m.

1. Calcolare la velocità che deve avere una particella carica perché attraversi il separatore senza essere deflessa;
2. Se si tratta di una particella alfa, quale sarà in tal caso la sua energia cinetica?

SOLUZIONE

1. Se il campo elettrico e il campo magnetico sono applicati simultaneamente, si possono regolare i rispettivi moduli in modo tale che la particella carica, attraversando la regione dei campi, non subisca alcuna deflessione. Quando questa condizione è soddisfatta, la forza elettrica è esattamente bilanciata da quella magnetica, cioè vale l'equazione:

$$eE = evB$$

da cui:

$$v = \frac{E}{B} = \frac{2{,}0\cdot10^4}{0{,}01} = 200\cdot10^4\ m/s$$

2. Una particella alfa è costituita da due protoni e due neutroni, esattamente come un nucleo di elio, per cui la sua massa è:

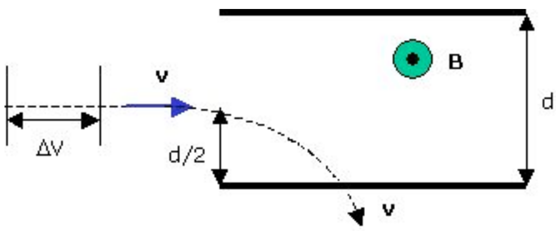
$$m_\alpha = 2m_p + 2m_n = 2\cdot1{,}672\cdot10^{-27} + 2\cdot1{,}674\cdot10^{-27} = 6{,}69\cdot10^{-27}kg$$

pertanto, la sua energia cinetica vale:

$$E_C = \frac{1}{2}m_\alpha v^2 = \frac{1}{2}\cdot6{,}69\cdot10^{-27}\cdot(200\cdot10^4)^2 = 1{,}34\cdot10^{-14}J = 0{,}83\cdot10^5\ eV$$

dove: $1\,eV = 1{,}602\cdot10^{-19}\ J \Rightarrow 1{,}34\cdot10^{-14}\ J = \dfrac{1{,}34\cdot10^{-14}}{1{,}602\cdot10^{-19}} = 0{,}83\cdot10^5\ eV$

PROBLEMA



Una particella di carica q=2 μC e massa $m=10^{-15}$ Kg viene accelerata da una differenza di potenziale di 1 kV ed entra tra le armature di un condensatore piano in un punto a metà tra i due piani con velocità parallela alle armature stesse (vedi figura). La distanza tra le armature è d=10 cm.
Nel condensatore è presente un campo magnetico B uniforme ortogonale alla velocità della particella ed uscente dal piano del foglio. La particella viene deviata dal campo B ed esce dall'armatura inferiore con velocità ortogonale all'armatura.

1. Trovare il valore del campo magnetico B.
2. Trovare la differenza di potenziale che occorre applicare ai capi del condensatore affinché la particella non risulti deviata e prosegua in linea retta. Specificare quale armatura deve essere positiva e quale negativa.

SOLUZIONE

1. La velocità della particella è legata al potenziale ΔV di accelerazione attraverso la legge di conservazione dell'energia:

$$E_{T_i} = E_{T_f} \Rightarrow qV = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^3}{10^{-15}}} = 2 \cdot 10^6 \ m/s$$

La forza di Lorentz, alla quale è soggetta la particella quando viene iniettata entro il campo **B** con velocità **v** ha modulo:

$$F_M = qvB \quad (1)$$

L'accelerazione acquistata dalla particella carica giace nel piano del disegno ed è, in ogni istante, perpendicolare alla velocità. Si tratta dunque di un'accelerazione centripeta e quindi la particella è soggetta ad una forza centripeta diretta verso il centro di curvatura della traiettoria, il cui modulo è:

$$F_C = m\frac{v^2}{R} \quad (2)$$

Pertanto, confrontando la (1) e (2) si ottiene un'equazione dalla quale è possibile ricavare il, modulo del campo magnetico B:

$$qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow B = \frac{mv}{qR} = \frac{10^{-15} \cdot 2 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 0{,}02\,T = 20\,mT$$

dove R = d/2 = 5 cm è il raggio di curvatura della traiettoria.

2. Se E e B sono i moduli del campo elettrico e del campo magnetico, sulla carica q agiscono due forze:

$$\text{Forza elettrica} \Rightarrow F_E = qE \qquad \text{Forza magnetica} \Rightarrow F_M = qvB$$

Affinché la particella non subisca nessuna deflessione e possa attraversare le armature del condensatore in linea retta, le due forze devono essere uguali:

$$qE = qvB \quad \text{da cui si ricava che:} \quad E = vB = 2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}02 = 4 \cdot 10^4 \ V/m$$

Pertanto, la differenza di potenziale che occorre applicare ai capi del condensatore affinché la particella non risulti deviata e prosegua in linea retta è:

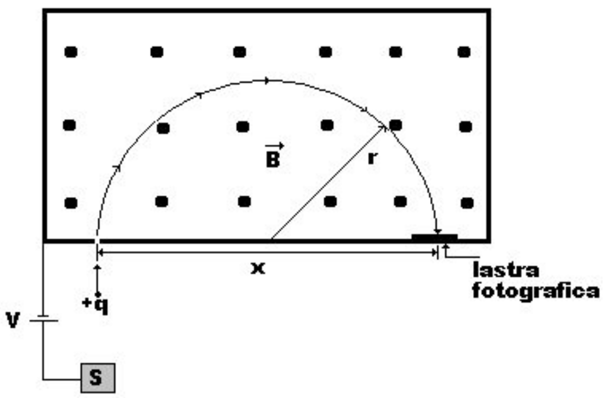
$$V = Ed = 4 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1 = 4000\ V = 4\,kV$$

L'armatura positiva è quella dalla quale esce la particella.

PROBLEMA

Trovare il raggio della traiettoria circolare, compiuta in uno spettrometro di massa di campo magnetico costante B = 0.15 T, delle seguenti particelle, tutte accelerate ad un'energia cinetica E_C = 1 KeV :

1. atomo di idrogeno ionizzato (protone, massa = $1{,}67 \cdot 10^{-27}$ Kg, carica=$1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C);
2. atomo di elio, ionizzato una volta;
3. nucleo di elio doppio ionizzato (particella alfa).



SOLUZIONE

Lo spettrometro di massa è un dispositivo ad alta precisione che consente di separare particelle cariche che hanno piccole differenze di massa (per esempio isotopi), per cui il raggio delle traiettorie da esse descritte saranno diversi.

1. Dalla definizione dell'energia cinetica ricaviamo la velocità:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_C}{m}} \quad (1)$$

dove: 1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J

Il raggio della traiettoria circolare compiuta dall'atomo di idrogeno ionizzato nello spettrometro lo ricaviamo dall'analisi del moto in un campo magnetico costante. L'accelerazione centripeta acquistata dalla particella carica è legata alla forza magnetica che essa subisce nel suo moto all'interno del campo magnetico **B** attraverso il 2° principio della dinamica:

$$F = ma_C \Rightarrow qvB = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{da cui si ricava :} \qquad r = \frac{mv}{qB} \quad (2)$$

Sostituendo nella (2) la (1) otteniamo:

$$r = \frac{m\sqrt{\frac{2E_C}{m}}}{qB} = \frac{\sqrt{2mE_C}}{qB} \quad (3)$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$r_{H^+} = \frac{\sqrt{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^3 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}15} = 0{,}0304 \text{ m} = 3{,}04 \text{ cm}$$

2. La massa dell'atomo di elio è 4 volte maggiore di quella dell'atomo di idrogeno per cui il raggio della traiettoria circolare descritta, in base alla (1), è 2 volte più grande:

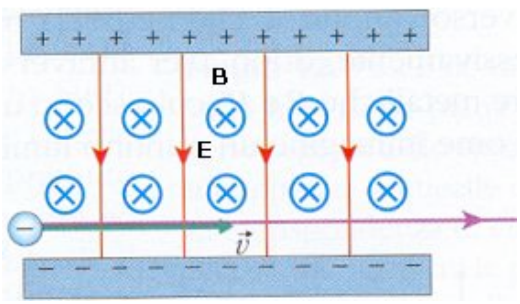
$$r_{H_e^+} = \frac{\sqrt{2 \cdot 4mE_C}}{qB} = 2r_{H^+} = 2 \cdot 3{,}04 = 6{,}08 \text{ cm}$$

3. La carica della particella alfa è doppia rispetto alla carica dell'atomo di idrogeno ionizzato ed ha una massa 4 volte più grande, per cui, in base alla (3) si ottiene:

$$r_\alpha = \frac{\sqrt{2 \cdot 4mE_C}}{2qB} = r_{H^+} = 3{,}04 \text{ cm}$$

PROBLEMA

Una particella carica entra in un regione di spazio in cui sono presenti un campo elettrico ed un campo magnetico ortogonali tra di loro ed alla direzione di moto della particella. Il campo elettrico ha modulo 500 N/C.



- Si trovi il valore del campo magnetico affinchè una particella di $2{,}5 \cdot 10^3$ m/s percorra una traiettoria rettilinea.

SOLUZIONE

Se il campo elettrico e il campo magnetico sono applicati simultaneamente, si possono regolare i rispettivi moduli in modo tale che la particella carica, attraversando la regione dei campi, non subisca alcuna deflessione. Quando questa condizione è soddisfatta, la forza elettrica è esattamente bilanciata da quella magnetica, cioè vale l'equazione:

$$eE = evB$$

da cui:

$$B = \frac{E}{v} = \frac{500}{2{,}5 \cdot 10^3} = 0{,}2\,T$$

PROBLEMA

Uno ione ^{58}Ni di carica +e avente massa $9{,}62 \cdot 10^{-26}$ kg, inizialmente fermo, viene dapprima accelerato attraverso una differenza di potenziale di 3 kV e poi deflesso in uno spettrometro di massa avente un campo magnetico B di modulo 0.12 T. Calcolare:

1. il raggio di curvatura della traiettoria circolare dello ione;
2. la differenza tra il raggio di curvatura degli ioni ^{58}Ni e quello degli ioni ^{60}Ni, nelle stesse condizioni sperimentali. Si supponga che il rapporto delle masse sia 58/60.

SOLUZIONE

1. Calcoliamo innanzitutto la velocità dello ione all'ingresso dello spettrometro. La velocità della particella è legata al potenziale ΔV di accelerazione attraverso la legge di conservazione dell'energia:

$$E_{T_i} = E_{T_f} \Rightarrow qV = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 3 \cdot 10^3}{9{,}62 \cdot 10^{-26}}} = 1{,}0 \cdot 10^5\,m/s$$

Il raggio della traiettoria circolare compiuta dallo ione nello spettrometro lo ricaviamo dall'analisi del moto in un campo magnetico costante. L'accelerazione centripeta acquistata dalla particella carica è legata alla forza magnetica che essa subisce nel suo moto all'interno del campo magnetico **B** attraverso il 2° principio della dinamica:

$$F = ma_C \Rightarrow qvB = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{da cui si ricava :} \quad r = \frac{mv}{qB} = \frac{9{,}62 \cdot 10^{-26} \cdot 1{,}0 \cdot 10^5}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}12} = 0{,}50\,m = 50\,cm$$

2. Se gli ioni ^{58}Ni e ^{60}Ni sono nelle stesse condizioni sperimentali allora i loro raggi di curvatura sono proporzionali alla massa attraverso le relazioni:

$$r_1 \propto m_1 v_i \Rightarrow r_1 \propto \sqrt{m_1} \qquad r_2 \propto m_2 v_2 \Rightarrow r_2 \propto \sqrt{m_2}$$

Quindi il rapporto tra i raggi è:

$$\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{58}{60}} = 0{,}98$$

Pertanto il raggio di curvatura dello ione ^{60}Ni è:

$$r_2 = \frac{r_1}{0{,}98} = \frac{50}{0{,}98} = 51\,cm$$

In definitiva, la differenza tra i due raggi è:

$$r = r_2 - r_1 = 51 - 50 = 1\,cm$$

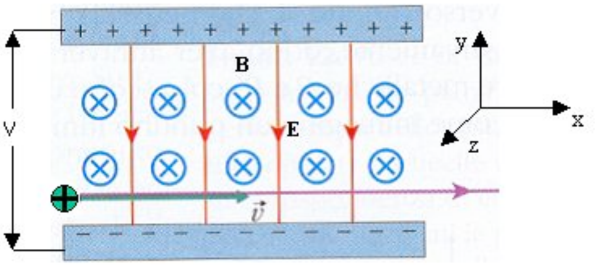
PROBLEMA

Un fascio di protoni con varie velocità è diretto nella direzione positiva dell'asse x. Il fascio entra in una regione dove è presente un campo magnetico uniforme di intensità B = 0,52 T che punta nel verso negativo dell'asse z (entrante nel foglio). Si vuole utilizzare un campo elettrico uniforme, in aggiunta al campo magnetico, per selezionare da questo fascio soli protoni che una velocità $v = 1{,}42 \cdot 10^5$ m/s (massa protone $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg).

Determinare:

1. il vettore campo elettrico **E** che produce i risultati desiderati;
2. la differenza di potenziale V da applicare ad un condensatore a facce piane e parallele, con una distanza tra le armature d = 2,5 cm, che produce il campo elettrico;
3. il segno della carica delle armature del condensatore.

SOLUZIONE



1. Dalla regola della mano destra si conclude che il protone con velocità **v,** immerso nel campo **B**, è soggetto ad una forza magnetica diretta verso l'alto di modulo:

$$F_M = qvB$$

Affinché la particella non subisca nessuna deflessione e possa attraversare le armature del condensatore in linea retta, dobbiamo applicare un campo elettrico **E**, diretto verso il basso, affinchè sul protone possa agire una forza elettrica:

$$F_E = qE$$

che equilibri quella magnetica, per cui:

$$qE = qvB \Rightarrow E = vB = 1{,}42 \cdot 10^5 \cdot 0{,}52 = 0{,}74 \cdot 10^5 \text{ v/m} = 74 \text{ kV/m}$$

2. La differenza di potenziale che produce il campo elettrico è:

$$V = Ed = 0{,}74 \cdot 10^5 \cdot 0{,}025 = 1850 \text{ V} = 1{,}85 \text{ kV}$$

3. L'armatura superiore del condensatore è caricata positivamente e quella inferiore negativamente in quanto il campo elettrico è sempre diretto dall'armatura positiva a quella negativa.

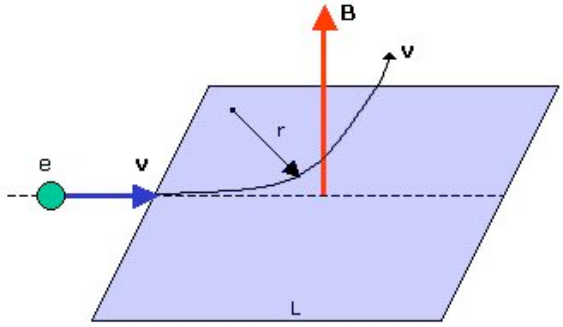
PROBLEMA

Una campo magnetico uniforme e costante **B** è prodotto in una zona dello spazio, avente come base un quadrato orizzontale di lato 30 cm. Il campo **B** ha direzione verticale. Un fascetto di elettroni ($m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ Kg; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C) con velocità $v = 0{,}50 \cdot 10^8$ m/s, entra nel campo magnetico nel punto centrale di uno dei lati, con velocità di entrata orizzontale e ortogonale al lato. Il fascio esce dal campo magnetico con direzione ortogonale ad un altro dei lati del quadrato, dopo avere compiuto un angolo di 90°.

Calcolare:

1. il valore del modulo della velocità finale degli elettroni;
2. il valore del modulo di **B**;
3. il tempo in cui gli elettroni restano nel campo magnetico.

SOLUZIONE



1. Un campo magnetico costante ed uniforme, ortogonale alla velocità, fa percorrere agli elettroni una traiettoria circolare senza modificare il modulo della velocità:

$$|v_{finale}| = |v_{iniziale}| = 0{,}50 \cdot 10^8 \ m/s$$

2. La forza di Lorentz, alla quale è soggetto l'elettrone quando entra nel campo **B** con velocità **v**, è orientata come in figura (regola mano destra) ed ha modulo:

$$F_M = evB \quad (1)$$

L'accelerazione acquistata dalla particella carica giace nel piano del quadrato ed è, in ogni istante, perpendicolare alla velocità. Si tratta dunque di un'accelerazione centripeta e quindi la particella è soggetta ad una forza centripeta diretta verso il centro di curvatura della traiettoria, il cui modulo è:

$$F_C = ma_C = m\frac{v^2}{r} \quad (2)$$

Pertanto, confrontando la (1) e (2) si ottiene un'equazione dalla quale è possibile ricavare il valore del modulo del campo **B**:

$$evB = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow B = \frac{mv}{er} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 0{,}50 \cdot 10^8}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 0{,}15} = 19 \cdot 10^{-4}\ T \qquad \text{dove } r = L/2$$

3. Gli elettroni percorrono un quarto di circonferenza, ossia:

$$s = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2} = \frac{\pi \cdot 0{,}15}{2} = 0{,}24\,m$$

per cui il tempo che gli elettroni restano nel campo magnetico è:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{0{,}24}{0{,}50 \cdot 10^8} = 0{,}47 \cdot 10^{-8}\ s$$

Se al posto degli elettroni avessimo protoni, cosa succederebbe?